

“边缘”的大作用

雷明礼 数学与统计学院

引言

1. 案例的背景

学科背景：概率论与数理统计是研究随机现象数量规律的数学学科，在现代科学技术的众多领域都有着不可或缺的作用。边缘分布作为多维随机变量分布的重要组成部分，是深入理解变量之间关系的关键环节。它能帮助我们从小维数据中提取单个变量的分布信息，在机器学习、数据分析、风险评估、生物统计等前沿领域应用广泛。例如在机器学习中，特征选择环节常需要分析每个特征(变量)单独的分布情况，此时边缘分布的知识就至关重要。

思政背景：在大数据时代，数据伦理和责任意识成为关键。思政教育融入教学，能引导学生树立正确的数据观和价值观。通过边缘分布的学习，培养学生严谨的治学态度和实事求是的精神，让学生认识到在处理和分析数据时，要保证数据的真实性和可靠性，不夸大或歪曲数据结论，从而提升学生的社会责任感。

课程特色：本课程注重理论与实践的深度融合，以丰富的实际案例贯穿教学始终，帮助学生更好地理解抽象的数学概念。教学中充分利用现代信息技术手段，如多媒体演示、统计软件操作等，将复杂的数学推导和分布图形直观地呈现给学生。同时，鼓励学生自主探索和团队协作，通过课堂讨论、小组项目等形式，培养学生的创新思维和合作能力。

2. 教学案例的创新点及课程教学中的价值

(1) 将思政元素巧妙融入边缘分布教学，使知识传授与价值引领有机结合；

(2) 借助“人工智能+”教学工具，如智能学习平台、数据分析软件等，实现教学的个性化和智能化。利用人工智能技术构建多维随机变量知识图谱，直观呈现条件分布与联合分布、边缘分布等概念之间的逻辑关系，帮助学生系统梳理知识体系。

(3) 借助 AI 助教实时解答学生疑问，根据学生的学习情况提供个性化学

习路径和练习题目。运用智能可视化工具，动态展示边缘分布在不同数据场景下的变化规律，增强课堂互动性和学生的直观理解。

（4）在课程教学中，该案例有助于学生系统掌握边缘分布的知识体系，提升学生运用数学知识解决实际问题的能力，培养学生的科学精神和职业道德，为学生未来从事相关领域工作奠定坚实基础。

一、课程基本信息

《概率论与数理统计》是我校面向理工、经管各专业大一学生开设的一门必修数学基础理论课，共 48 学时，3 学分。

二、课程教学整体设计思路

1. 课程思政理念

坚持立德树人根本任务，以培养具有良好道德品质、强烈社会责任感和创新精神的高素质人才为目标。在教学中，将思政教育与边缘分布知识传授紧密结合，引导学生在学习专业知识的同时，树立正确的世界观、人生观和价值观，培养学生严谨、负责、创新的科学素养。

2. 课程思政素材

历史故事：讲述概率论发展历程中，数学家们为追求真理不懈努力的故事。如卡尔·皮尔逊为完善统计理论付出的艰辛，让学生体会科学研究需要坚韧不拔的毅力和勇于探索的精神。

社会热点案例：引入社会热点问题相关的数据，如环境污染监测数据、医疗资源分配数据等。以这些数据为背景讲解边缘分布，让学生意识到数学知识在解决社会问题中的重要性，增强学生的社会责任感。

行业规范案例：介绍数据分析行业中因数据造假导致严重后果的案例，强调数据真实性和规范性的重要性，培养学生的职业道德和诚信意识。

3. 课程思政融入模式

课程导入融入：在课程导入环节，以社会热点数据问题为切入点，引出边缘分布的概念。例如，在讲解二维随机变量的边缘分布时，展示不同地区、不同年龄段人群的健康数据，引导学生思考如何从整体数据中分析单个因素（如年龄或地区）对健康状况的影响，从而自然地引入边缘分布的概念，同时激发学生关注社会问题的意识。

知识讲解融入：在讲解边缘分布的计算方法和性质时，穿插介绍数学家的故事，让学生感受数学家严谨的治学态度。比如，在推导边缘分布的公式过程中，讲述相关数学家如何经过反复论证和推导得出正确结论，培养学生严谨的科学精神。

实践环节融入：在实践教学中，布置与社会热点或实际生活相关的项目任务，让学生运用边缘分布知识进行数据分析。例如，让学生分析城市交通流量数据，研究不同时间段、不同路段的交通拥堵情况。在完成项目过程中，引导学生思考如何保证数据的真实性和可靠性，以及分析结果对城市规划和交通管理的意义，培养学生的社会责任感和职业道德。

三、案例教学目标

1. 知识目标

理解边缘分布的概念，包括二维及多维离散型和连续型随机变量的边缘分布律、边缘概率密度函数。熟练掌握边缘分布与联合分布之间的关系，能够根据联合分布准确计算边缘分布。掌握不同类型随机变量边缘分布的性质和特点，能运用这些性质解决相关数学问题。

2. 能力目标

具备运用边缘分布知识对实际问题进行数学建模的能力，能够从复杂的数据中提取关键信息，构建合适的数学模型进行分析。培养学生使用统计软件（如 Python、R 语言）计算和绘制边缘分布的实践能力，提升学生的数据处理和分析能力。通过课堂讨论和小组项目，锻炼学生的团队协作能力和沟通表达能力，提高学生解决实际问题的综合素质。

3. 素养目标

通过学习数学家的故事和思政案例，培养学生严谨的科学态度、社会责任感、家国情怀和科学精神。借助社会热点案例的分析，增强学生关注社会、服务社会的意识，培养学生的社会责任感和使命感。提升学生的数学素养和综合应用能力，增强将数学知识应用于实际场景的意识。强化学生的数据伦理意识和职业道德，使学生在未来的工作中能够坚守诚信原则，确保数据的真实性和可靠性。

四、案例教学实施过程

1. 课前准备

(1) 制作包含条件分布理论知识讲解、公式推导动画的预习微课视频，通过在线学习平台发布给学生，并布置预习任务，要求学生观看视频后完成相关概念填空和简单计算练习题。

(2) 利用学习通分析系统收集学生的预习数据，分析学生的知识薄弱点和疑问点，为课堂教学内容设计和重点讲解提供依据。

(3) 准备丰富的实际案例资料，如金融投资中不同风险等级、不同市场环境下投资收益的条件分布案例，以及医疗诊断中不同症状、不同年龄段患者患病概率的条件分布案例。

2. 教学实施

新课引入（5 分钟）

问题引入：在上节中已经掌握了联合分布函数，联合分布律和联合概率密度函数的定义及求解，那么二维随机变量中两个随机变量各自单独的分布又是怎样的呢？本节引入二维随机变量的边缘分布函数，离散型二维随机变量的边缘分布率及连续型二维随机变量的边缘概率密度。

新课讲解：（80 分钟）

一、边缘分布函数（10 分钟）

1 定义：二维随机向量 (X,Y) 作为一个整体，有分布函数 $F(x,y)$ ，其分量 X 与 Y 都是随机变量，有各自的分布函数，分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别称为 X 的边缘分布函数和 Y 的边缘分布函数；称 (X,Y) 为的联合分布函数。

2 求法：

已知二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ ，则

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x,y) = F(x, +\infty)$$

同理

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \leq +\infty, Y \leq y\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x,y) = F(+\infty, y)$$

故边缘分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$ 可由 (X,Y) 的分布函数所确定

注： X 与 Y 的边缘分布函数实质上就是一维随机变量 X 或 Y 的分布函数。

称其为边缘分布函数的，是相对于 (X,Y) 的联合分布而言的。

同样地， (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$ 是相对于 (X,Y) 的分量 X 与 Y 的分布而言的。

例 1: 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = A \left(B + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(C + \arctan \frac{y}{3} \right) \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$$

试求: (1). 常数 A 、 B 、 C ; (2). X 及 Y 的边缘分布函数.

解: (1). 由分布函数的性质, 得 $1 = F(+\infty, +\infty) = A \left(B + \frac{\pi}{2} \right) \left(C + \frac{\pi}{2} \right)$

$$0 = F(x, -\infty) = A \left(B + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(C - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$0 = F(-\infty, y) = A \left(B - \frac{\pi}{2} \right) \left(C + \arctan \frac{y}{3} \right)$$

由以上三式可得, $A = \frac{1}{\pi^2}$, $B = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{2}$

(2). X 的边缘分布函数为

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \quad (x \in (-\infty, +\infty)) \end{aligned}$$

同理, Y 的边缘分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right) \quad (y \in (-\infty, +\infty)) \end{aligned}$$

二、离散型随机变量的边缘概率分布 (15 分钟)

1. 边缘分布函数

对于二维离散型随机变量 (X,Y) , 已知其联合概率分布为

$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots)$, 其分布函数为 $F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

则它关于 X 的边缘分布函数为 $F_X(x) = F(x, +\infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$

它关于 Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

2. 边缘概率分布

随机变量 X 的概率分布

$$P_i = P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ij} + \dots = \sum_j p_{ij}$$

同理, 随机变量 Y 的分布律为

$$P_j = P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}$$

3 已知联合概率分布求边缘概率分布

X 以及 Y 的边缘概率分布可由下表表示

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	$p_{\cdot j}$	$\dots$	

例 2 设二维随机变量的联合概率分布为

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	-2	0	1
-1	0.3	0.1	0.1
1	0.0	0.2	0
	5		

2	0.2	0	0.05
---	-----	---	------

求 X, Y 的边缘分布律。

解：

$X \backslash Y$	-2	0	1	$P\{X = x_i\} =$
-1	0. 3	0 .1	0. 1	0.5
1	0. 05	0 .2	0	0.25
2	0. 2	0	0. 05	0.25
$P\{X = y_i\} =$	0. 55	0 .3	0. 15	

例 3： 设随机变量 X_1 和 X_2 的分布律分别为

X_1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X_2	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$ ，求 X_1 和 X_2 的联合分布律

解： 因 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$ ，故 $P\{X_1 X_2 \neq 0\} = 0$.

因事件 $\{X_1 X_2 \neq 0\}$ 是互不相容的事件 $\{X_1 = 1, X_2 = -1\}$ 与 $\{X_1 = 1, X_2 = 1\}$ 的和，

所以 $P\{X_1 = 1, X_2 = -1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = 0$ 即 $p_{21} = 0, p_{23} = 0$

由 X_1, X_2 的联合概率分布及边缘概率分布表：

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{i.}$

0	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\frac{1}{2}$
1	$p_{21} = 0$	p_{22}	$p_{23} = 0$	$\frac{1}{2}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

知 $p_{11} = \frac{1}{4}, p_{22} = \frac{1}{2}, p_{12} = 0, p_{13} = \frac{1}{4}$

故

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0

三、连续型随机变量的边缘概率密度（40 分钟）

对于二维连续型随机变量 (X, Y) ，已知其联合密度函数为 $f(x, y)$

现求随机变量 X 的边缘密度函数 $f_X(x)$

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$$

上式表明： X 是连续型随机变量，且其密度函数为： $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$,

称 $f_X(x)$ 为 (X, Y) 关于 X 的边缘概率分布

$$\text{同理，由 } F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

Y 是连续型随机变量，且其密度函数为 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

称 $f_Y(y)$ 为 (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度

例 3: 设 (X, Y) 服从有界区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 x 轴, y 轴及直线

$\frac{x}{2} + y = 1$ 所围成的三角形区域, 求 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度.

解：区域 G 的面积为 1, 所以 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

则 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy = 1 - \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

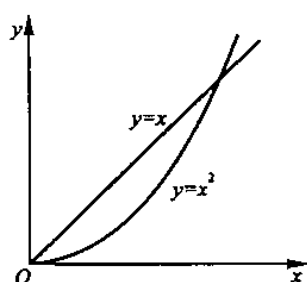
(X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^{2(1-y)} dx = 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

例 4：设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ 上服从均匀分布，求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$

解： (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



$$\text{则 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

虽然 (X, Y) 的联合分布是在 G 上服从均匀分布, 但是它们的边缘分布却不是均匀分布。

四、二维正态分布 (15 分钟)

若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 均为常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$, 则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布. 记成 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$

例 5: 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ 求 X 和 Y 的边缘概率密度

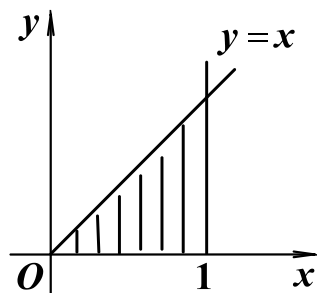
解: 由 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ 得 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$.

这说明: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$; 同理, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

注: 二维正态随机变量的两个边缘分布都是一维正态分布, 且都不依赖于参数 ρ , 亦即对给定的 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$, 不同的 ρ 对应不同的二维正态分布, 但它们的边缘分布都是相同的, 因此仅由关于 X 和关于 Y 的边缘分布, 一般来说是不能确定二维随机变量 (X, Y) 的联合分布的.

练习:1 设 (X, Y) 的概率密度是 $f(x, y) = \begin{cases} cy(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求 (1) c 的值; (2) 两个边缘密度.



解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ 确定 c .

$$\int_0^1 \left[\int_0^x cy(2-x) dy \right] dx$$

$$= c \int_0^1 [x^2(2-x)/2] dx$$

$$= 5c/24 = 1$$

所以 $c = 24/5$.

$$(2) f_X(x) = \int_0^x \frac{24}{5} y(2-x) dy = \frac{12}{5} x^2(2-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{24}{5} y(2-x) dx = \frac{24}{5} y \left(\frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2} \right), \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{即 } f_X(x) = \begin{cases} \frac{12}{5} x^2(2-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{24}{5} y \left(\frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2} \right), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

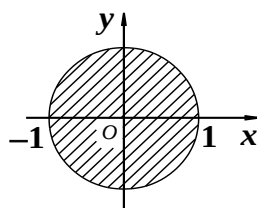
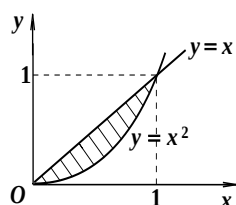
2 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

$$\text{解 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



3 设 (X, Y) 服从单位圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的均匀分布, 求 X 和 Y 的边缘概率密度.

$$\text{解 } f(x, y) = \begin{cases} 1/\pi, & \text{当 } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f(x, y) = 0$, 从而 $f_X(x) = 0$.

$$\text{当 } -1 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}.$$

于是我们得到 X 的边缘概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由 X 和 Y 在问题中地位的对称性, 将上式中的 x 改成 y , 就得到 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & -1 \leq y \leq 1. \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

课堂小结 (5 分钟)

随堂测试（一）

随堂练习

边缘分布

04-21 14:01

已交: 93/111

已结束

编辑

导出

再次发放

必答[单选题]若二维随机变量 (X,Y) 在以原点为中心的正方形 $[-1,1] \times [-1,1]$ 上服从均匀分布,则 $P\{X < 1/2\} =$

本题已答 : 93

✓ 正确答案: D

A. 1/2

2人

2.2%

B. 1/3

1人

1.1%

C. 2/3

0人

0%

D. 3/4

90人

96.7%

选项	人数	百分比
A	2	2.2%
B	1	1.1%
C	0	0%
D	90	96.7%

随堂测试（二）

随堂练习

联合概率密度与边缘概率密度

04-23 10:09

已交: 94/111

已结束

编辑

导出

再次发放

必答[判断题]已知相互独立的二维随机变量 (X, Y) 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则可求出联合概率密度 $f(x,y)$.

本题已答 : 94

✓ 正确答案: 对

对

79人

84%

错

15人

16%

选项	人数	百分比
对	79	84.0%
错	15	16.0%

3. 教学评估

(1) **课堂表现评估:** 教师观察学生在课堂讨论、发言、软件操作等环节的表现, 对学生的参与度、知识掌握程度和团队协作能力进行评价。

(2) **作业评估：**批改学生的课后作业，分析学生对知识的掌握情况和存在的问题，针对学生的错误进行详细讲解和指导。

(3) **阶段性测试评估：**在教学过程中安排阶段性测试，全面考查学生对条件分布知识的理解、掌握和应用能力，根据测试结果调整教学策略和方法。

五、教学效果及反思

1. 教学效果

通过课堂观察、作业批改和阶段性测试结果分析，大部分学生能够较好地掌握多维随机变量条件分布的概念、计算方法和实际应用。在案例分析环节，学生表现出较高的学习积极性。学生对课程思政案例和“人工智能+”教学方式反馈良好，认为这种教学模式有助于理解抽象知识，激发学习兴趣，提升综合能力。

2. 反思

在教学过程中，发现部分学生在连续型随机变量条件概率密度函数的积分计算方面存在困难，主要原因是学生对积分知识的掌握不够熟练。此外，在小组讨论环节，部分小组存在讨论不充分、个别学生参与度不高的问题。针对这些问题，在后续教学中，应加强对积分知识的复习和巩固，增加相关练习题的训练。优化小组讨论的组织形式，明确小组成员的分工和任务，加强对小组讨论过程的引导和监督，提高小组讨论的效果和质量。同时，进一步挖掘更多新颖、贴近生活的实际案例，丰富教学内容，提升学生的学习兴趣和学习效果。